

**Soal dan Pembahasan**  
**Kompetisi Sains Nasional**  
**Hari Pertama**  
**SMP/MTs Sederajat**

WILDAN BAGUS WICAKSONO

Updated 4 Nopember 2020

# PEMBERITAHUAN

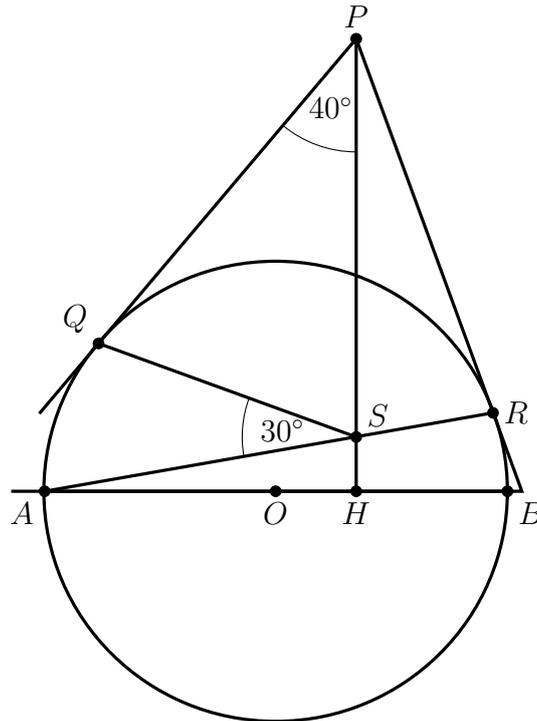
Soal KSN SMP Hari Pertama pada file ini **belum tentu sama** dengan soal aslinya. Karena file yang didapatkan berupa tulisan kasaran atau tulisan tangan sehingga tidak dapat dijamin sama persis dengan soal aslinya. File ini dapat disebar atau dicetak tanpa mengubah atau menghilangkan identitas penulis. Ucapan terima kasih kepada Rizky Maulana Hakim, M. Faikar Mustafidz Alhabibi, dan I Putu Dickson Partha Hartopo untuk koreksinya. Koreksi, kritik, maupun saran akan sangat berharga bagi saya dan dapat disampaikan melalui [instagram](#) atau [facebook](#) saya.

**I**

Soal

**Soal 1.** Terdapat sebuah rapat yang terdiri dari 40 kursi yang dihadiri oleh 16 tamu undangan. Untuk menghindari penularan COVID-19, maka setiap tamu undangan harus dibatasi minimal dengan 1 kursi. Tentukan banyaknya susunan mereka duduk.

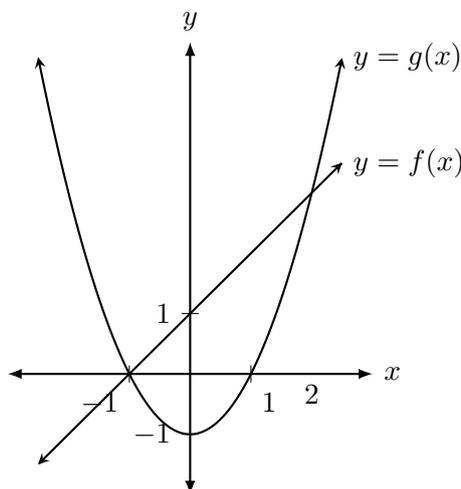
**Soal 2.** Misalkan  $AB$  sebagai diameter lingkaran dan  $P$  titik diluar lingkaran. Garis  $PQ$  dan  $PR$  menyinggung lingkaran di titik  $Q$  dan  $R$ . Garis  $PH$  berpotongan tegak lurus dengan garis  $AB$  di  $H$  dan  $PH$  berpotongan  $AR$  di  $S$ . Jika  $\angle QPH = 40^\circ$  dan  $\angle QSA = 30^\circ$ , tentukan  $\angle RPS$ .



**Soal 3.** Diberikan grafik fungsi  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tentukan banyak nilai  $x$  agar

$$(f(x))^2 - 2g(x) - x$$

merupakan anggota himpunan  $\{-10, -9, \dots, 0, 1, 2, \dots, 10\}$ .



**Soal 4.** Pada teka-teki silang berikut, masing-masing kotak hanya boleh diisi dari angka 1 sampai 9 dengan ketentuan:

**Mendatar:**

1. Faktor komposit dari 1001.
3. Bilangan bukan palindrom.
5.  $p \times q^3$  dengan  $p$  dan  $q$  merupakan dua bilangan prima yang berbeda.

**Menurun:**

1.  $a - 1$  dan  $b - 1$ ,  $a \neq b$  dan  $a, b$  prima.
2. Kelipatan 9.
4.  $p^3 \times q$ , dengan  $p$  dan  $q$  merupakan dua bilangan prima yang berbeda.

1	2	
3		4
	5	

**Soal 5.** Di suatu kebun yang berbentuk segiempat di setiap titik sudut terdapat menara pengawas dan di dalam kebun tersebut terdapat menara pemantau. Akan dibuat daerah-daerah kecil yang tersebut berbentuk segitiga sehingga titik sudutnya merupakan menara (bebas menara pemantau dan atau pengawas). Misalkan  $k(m, n)$  banyaknya daerah kecil yang dibuat jika ada  $m$  menara pengawas dan  $n$  menara pemantau.

- (a). Nilai  $k(4, 1)$ ,  $k(4, 2)$ ,  $k(4, 3)$ , dan  $k(4, 4)$ .
- (b). Rumus umum  $k(m, n)$  dengan  $m$  dan  $n$  bilangan asli.

# II

## Soal dan Pembahasan

**Soal 1.** Terdapat sebuah rapat yang terdiri dari 40 kursi yang dihadiri oleh 16 tamu undangan. Untuk menghindari penularan COVID-19, maka setiap tamu undangan harus dibatasi minimal dengan 1 kursi. Tentukan banyaknya susunan mereka duduk.

.....

SOLUSI. Jawabannya adalah  $16! \times C(25, 16)$ .

Beri nomor kursi-kursi tersebut dengan nomor  $1, 2, 3, 4, \dots, 39$ , dan  $40$  (misalkan) dari ujung kiri ke ujung kanan dalam urutan tersebut. Misalkan  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{16}$  adalah nomor-nomor kursi yang diduduki oleh 16 orang tersebut dimana  $a_i \in \{1, 2, 3, \dots, 40\}$  untuk setiap bilangan asli  $1 \leq i \leq 16$ , lalu pandang himpunan  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{16}\}$ . Definisikan pula  $w_j = a_j - a_{j-1}$  dimana  $w_j \geq 2$  untuk setiap bilangan asli  $2 \leq j \leq 16$ . Perhatikan bahwa

$$a_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_{16} = a_{16} \leq 40$$

Maka terdapat bilangan asli  $k$  sehingga

$$a_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_{16} = 41 - k \iff a_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_{16} + k = 41$$

Misalkan  $w_j = x_j + 1$  dimana  $x_j$  bilangan asli. Maka kita punya

$$a_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_{16} + k = 41$$

$$a_1 + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) + \dots + (x_{16} + 1) + k = 41$$

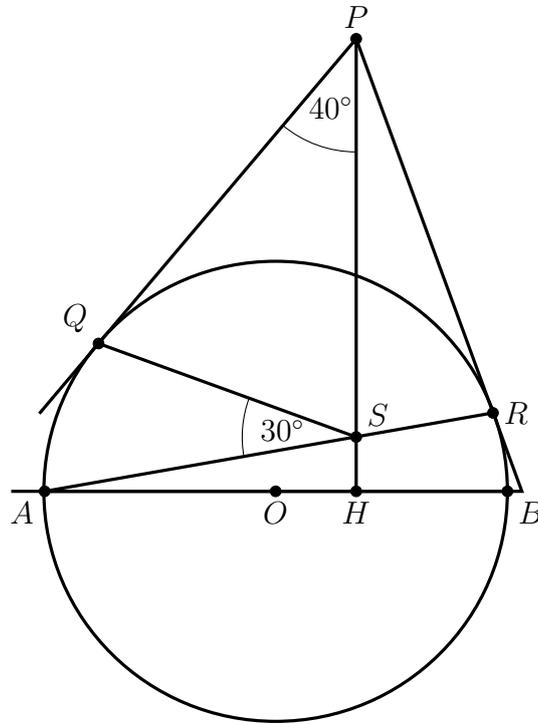
$$a_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{16} + k = 26 \quad (*)$$

Kita tahu bahwa  $a_j$  bijektif dengan  $x_j$ , sehingga banyak himpunan  $\{a_1, a_2, \dots, a_{16}\}$  sama dengan menentukan banyak solusi dari (\*). Dengan star and bar theorem, maka ada

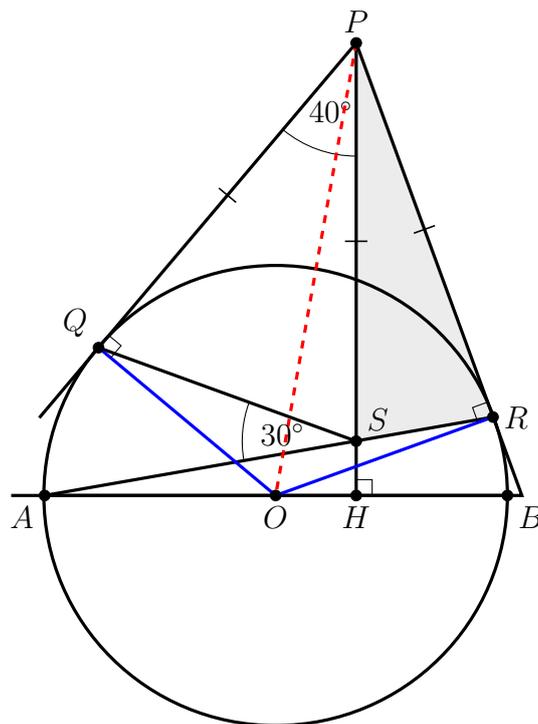
$$C(26 - 1, 17 - 1) = C(25, 16)$$

Karena posisi 16 orang tersebut dapat ditukar-tukar (dipermutasi), maka banyaknya posisi duduk yang dapat disusun adalah  $16! \times C(25, 16)$ .

**Soal 2.** Misalkan  $AB$  sebagai diameter lingkaran dan  $P$  titik diluar lingkaran. Garis  $PQ$  dan  $PR$  menyinggung lingkaran di titik  $Q$  dan  $R$ . Garis  $PH$  berpotongan tegak lurus dengan garis  $AB$  di  $H$  dan  $PH$  berpotongan  $AR$  di  $S$ . Jika  $\angle QPH = 40^\circ$  dan  $\angle QSA = 30^\circ$ , tentukan  $\angle RPS$ .



SOLUSI. Jawabannya adalah  $\boxed{20^\circ}$ .



Perhatikan bahwa  $\angle ORP = \angle OQP = 90^\circ$  dan panjang  $OR = OQ$ . Sehingga kita punya  $\triangle ORP$  kongruen dengan  $\triangle OQP$ . Demikian panjang  $PQ = PR$ .

**Klaim** —  $\triangle PSR$  segitiga sama kaki.

*Bukti.* Kita punya

$$\angle HAS = 90^\circ - \angle HSA = 90^\circ - \angle RSP$$

Karena panjang  $AO = OR$ , maka

$$\angle ARO = \angle OAR = \angle HAR = \angle HAS$$

Tinjau bahwa

$$\angle PRS = 90^\circ - \angle ARO = 90^\circ - \angle HAS = 90^\circ - (90^\circ - \angle RSP) = \angle RSP$$

Akibatnya,  $\angle PRS = \angle RSP$  yang menyimpulkan  $\triangle PSR$  segitiga sama kaki. □

Karena panjang  $QP = PR = PS \Rightarrow QP = PS$ , maka

$$\angle PQS = \angle PSQ = \frac{180^\circ - \angle QPS}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$

Perhatikan bahwa  $\angle PSA + \angle PSR = 180^\circ$ . Kita punya

$$\angle PSR = 180^\circ - \angle PSA = 180^\circ - (30^\circ + 70^\circ) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

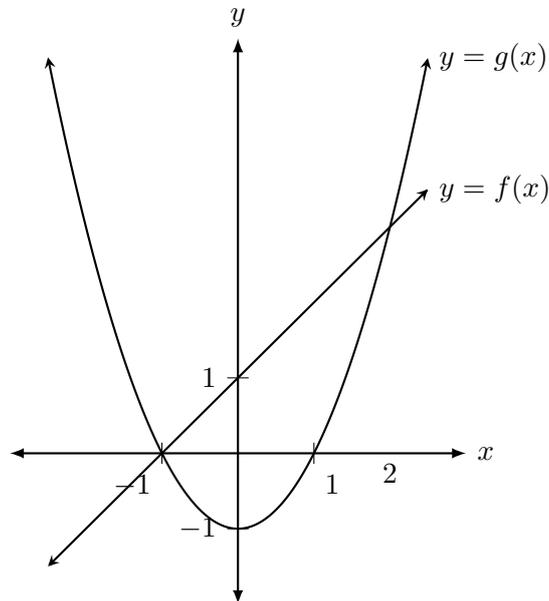
Karena panjang  $PS = PR$ , akibatnya  $\angle PRS = \angle PSR = 80^\circ$ . Maka kita peroleh

$$\angle RPS = 180^\circ - \angle PSR - \angle PRS = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$$

**Soal 3.** Diberikan grafik fungsi  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tentukan banyak nilai  $x$  agar

$$(f(x))^2 - 2g(x) - x$$

merupakan anggota himpunan  $\{-10, -9, \dots, 0, 1, 2, \dots, 10\}$ .



SOLUSI. Banyak nilai  $x$  yang memenuhi adalah 28.

Karena fungsi kuadrat  $g(x)$  memotong sumbu- $x$  di titik  $(-1, 0)$  dan  $(1, 0)$ , maka  $-1$  dan  $1$  merupakan akar-akar dari  $g(x)$ . Akibatnya,

$$g(x) = a(x - 1)(x + 1), \quad a \neq 0$$

Grafik  $g(x)$  melalui titik  $(0, -1)$ , maka

$$-1 = g(0) = a(0 - 1)(0 + 1) = a \cdot (-1) \cdot 1 = -a \iff a = 1$$

Maka  $g(x) = x^2 - 1$ . Tinjau fungsi linier  $f(x)$  memotong sumbu- $x$  di titik  $(-1, 0)$  dan  $(0, 1)$ .

Misalkan  $f(x) = ax + b$ . Maka kita punya

$$0 = f(-1) = -a + b \quad \text{dan} \quad 1 = f(0) = b$$

Kita peroleh bahwa  $a = b = 1$  sehingga  $f(x) = x + 1$ . Kita definisikan fungsi  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dimana  $h(x) = (f(x))^2 - 2g(x) - x$ . Kita punya

$$h(x) = (x + 1)^2 - 2(x^2 - 1) - x = x^2 + 2x + 1 - 2x^2 + 2 - x = -x^2 + x + 3$$

Kita ingin mencari banyak nilai  $x$  sehingga  $h(x) = c$  dimana  $c \in \{-10, -9, \dots, 9, 10\}$ . Sehingga kita punya

$$0 = h(x) - c = -x^2 + x + 3 - c \iff 0 = x^2 - x + (c - 3)$$

Agar persamaan kuadrat tersebut memiliki penyelesaian bilangan real, maka diskriminannya harus  $\Delta \geq 0$ . Kita punya

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(c - 3) = 1 - 4c + 12 = 13 - 4c \geq 0 \iff \frac{13}{4} \geq c$$

Sehingga nilai  $c = -10, -9, \dots, 3$  yang berarti ada 14 kemungkinan. Karena  $c$  bilangan bulat, akibatnya  $\Delta \neq 0$  sehingga terdapat dua solusi bilangan real berbeda untuk setiap  $-10 \leq c \leq 3$ . Maka banyak nilai  $x$  yang memenuhi adalah  $14 \times 2 = 28$ .

**Soal 4.** Pada teka-teki silang berikut, masing-masing kotak hanya boleh diisi dari angka 1 sampai 9 dengan ketentuan:

**Mendatar:**

1. Faktor komposit dari 1001.
3. Bilangan bukan palindrom.
5.  $p \times q^3$  dengan  $p$  dan  $q$  merupakan dua bilangan prima yang berbeda.

**Menurun:**

1.  $a - 1$  dan  $b - 1$ ,  $a \neq b$  dan  $a, b$  prima.
2. Kelipatan 9.
4.  $p^3 \times q$ , dengan  $p$  dan  $q$  merupakan dua bilangan prima yang berbeda.

1	2	
3		4
	5	

.....

SOLUSI. Jawabannya adalah sebagai berikut.

7	7	
2	9	5
	2	4

Misalkan  $a$  dan  $b$  merupakan angka dari 1 sampai 9 yang diisi pada petak berikut.

<sup>1</sup> $G$	<sup>2</sup> $F$	
<sup>3</sup> $E$	$A$	<sup>4</sup> $D$
	<sup>5</sup> $C$	$B$

Dari (1) posisi mendatar, faktorisasi 1001 adalah  $1001 = 7 \times 11 \times 13$ . Dilihat dari kotak mendatar yang hanya boleh diisi dari posisi (1) hanya dua kotak, maka angka yang terletak pada kotak 1 dan kotak 2 merupakan angka pembentuk dari bilangan dua angka yang merupakan faktor komposit dari 1001. Sehingga kemungkinannya adalah 77 atau 91.

Sekarang, kita tinjau poin (1) posisi menurun.

- Jika  $\overline{GF} = 91$  sehingga  $G = 9$  dan  $F = 1$ . Maka  $\overline{GE} - 1 = \overline{9E} - 1$  dan  $\overline{GE} + 1 = \overline{9E} + 1$  keduanya harus bilangan prima sehingga  $E$  harus genap. Dengan mencoba semua kemungkinan nilai  $\overline{9E}$  yaitu 92, 94, 96, 98, tidak ada kemungkinan nilai  $E$  yang memenuhi kondisi tersebut.
- Jika  $\overline{GF} = 77$  sehingga  $G = F = 7$ . Maka  $\overline{GE} - 1$  dan  $\overline{GE} + 1$  keduanya merupakan bilangan prima sehingga  $E$  harus genap. Dengan mencoba semua kemungkinan nilai dari  $\overline{GE}$  yaitu 72, 74, 76, 78, maka hanya akan dipenuhi ketika  $\overline{GE} = 72$ . Demikian  $E = 2$ .

Dari poin (3) mendatar, karena  $\overline{EAD}$  bukan bilangan palindrom, maka  $D \neq E = 2$ . Dari poin (4) menurun, bilangan dua digit  $\overline{DB} = p^3 \times q$ . Sedangkan, dari poin (5) menurun, bilangan dua digit  $\overline{CB} = p \times q^3$ . Jika salah satu dari  $p, q$  bernilai lebih dari 3, maka salah satu dari  $\overline{DB}$  atau  $\overline{CB}$  bernilai lebih dari 99. Sehingga tidak mungkin bilangan dua digit. Maka  $(p, q) = (3, 2)$  atau  $(2, 3)$ . Maka kemungkinan nilai untuk  $\overline{DB}$  dan  $\overline{CB}$  adalah 24 dan 54. Karena  $D \neq E$ , maka  $\overline{DB} = 54$  dan  $\overline{CB} = 24$ . Demikian  $B = 4, C = 2$ , dan  $D = 5$ .

Dari poin (2), maka  $\overline{FAD}$  kelipatan 9. Sehingga

$$F + A + C = 7 + A + 2 = 9 + A \equiv 0 \pmod{9} \iff A \equiv 0 \pmod{9}$$

Sehingga  $A = 9$ . Maka kita peroleh susunan angka pada teka-teki silang tersebut sebagai berikut.

7	7	
2	9	5
	2	4

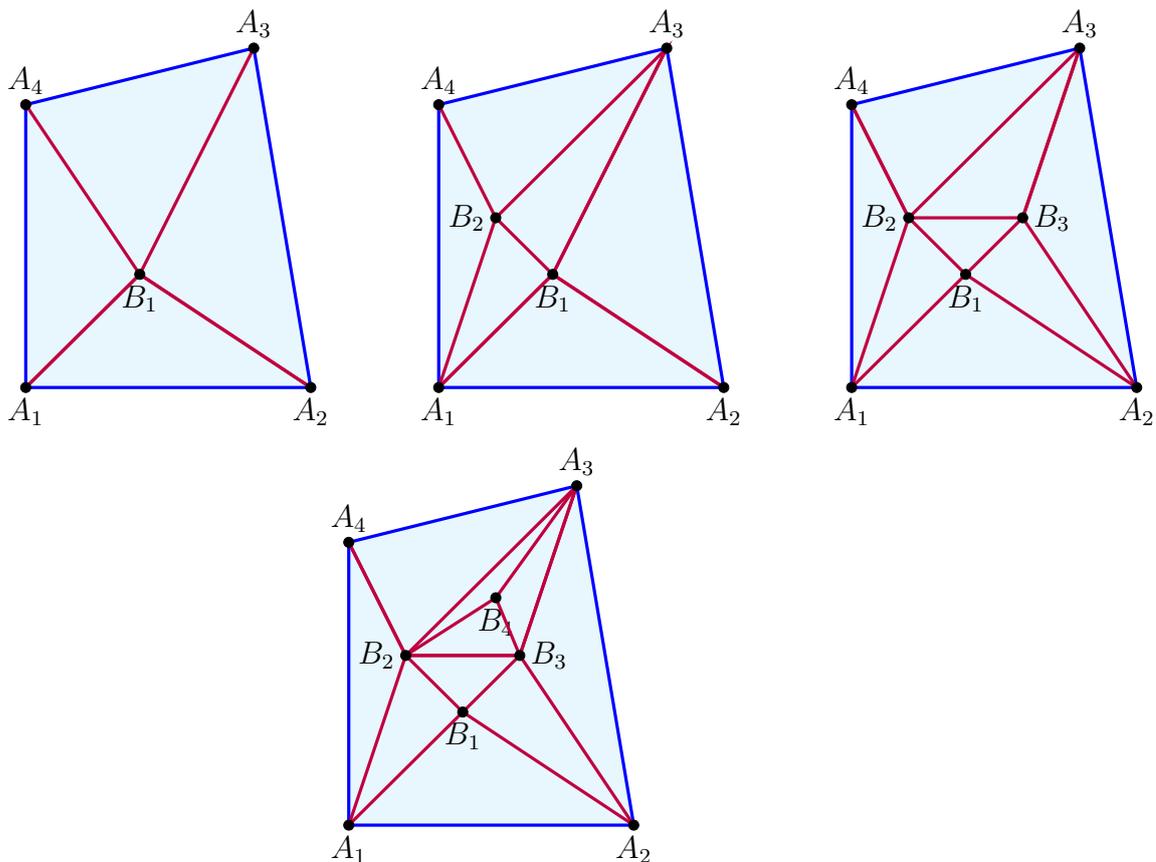
**Soal 5.** Di suatu kebun yang berbentuk segiempat di setiap titik sudut terdapat menara pengawas dan di dalam kebun tersebut terdapat menara pemantau. Akan dibuat daerah-daerah kecil yang tersebut berbentuk segitiga sehingga titik sudutnya merupakan menara (bebas menara pemantau dan atau pengawas). Misalkan  $k(m, n)$  banyaknya daerah kecil yang dibuat jika ada  $m$  menara pengawas dan  $n$  menara pemantau.

- (a). Nilai  $k(4, 1), k(4, 2), k(4, 3)$ , dan  $k(4, 4)$ .
- (b). Rumus umum  $k(m, n)$  dengan  $m$  dan  $n$  bilangan asli.

.....  
 SOLUSI. Jawabannya adalah  $k(4, 1) = 4$ ,  $k(4, 2) = 6$ ,  $k(4, 3) = 8$ , dan  $k(4, 4) = 10$ , dan  $k(m, n) = m + 2n - 2$ .

Misalkan titik-titik  $A_1, A_2, A_3, \dots$  sebagai menara pengawas dan  $B_1, B_2, B_3, \dots$ , sebagai menara pemantau.

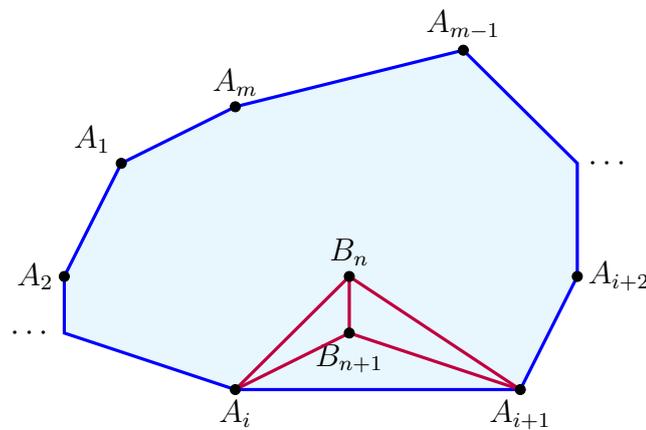
- (a). Perhatikan gambar berikut.



- Untuk  $k(4, 1)$ . Dari gambar tersebut, kita dapatkan daerah tersebut adalah  $\triangle A_1 B_1 A_2$ ,  $\triangle A_2 B_1 A_3$ ,  $\triangle A_3 B_1 A_4$ , dan  $\triangle A_1 B_1 A_4$ . Maka  $k(4, 1) = 4$ .
- Untuk  $k(4, 2)$ . Dari gambar tersebut, kita dapatkan daerah tersebut adalah  $\triangle A_1 A_2 B_1$ ,  $\triangle A_2 B_1 A_3$ ,  $\triangle B_1 A_3 B_2$ ,  $\triangle B_2 A_3 A_4$ ,  $\triangle A_1 B_2 A_4$ , dan  $\triangle A_1 B_1 B_2$ . Maka  $k(4, 2) = 6$ .

- Untuk  $k(4, 3)$ . Dari gambar tersebut, kita dapatkan daerah tersebut adalah  $\triangle A_1 B_1 A_2$ ,  $\triangle A_2 B_1 B_3$ ,  $\triangle A_2 B_3 A_3$ ,  $\triangle B_2 B_1 B_3$ ,  $\triangle B_2 B_3 A_3$ ,  $\triangle A_4 B_2 A_3$ ,  $\triangle A_1 B_2 A_4$ , dan  $\triangle A_1 B_1 B_2$ . Maka  $k(4, 3) = 8$ .
- Untuk  $k(4, 4)$ . Dari gambar tersebut, kita dapatkan daerah tersebut adalah  $\triangle A_1 A_2 B_1$ ,  $\triangle A_2 B_1 B_3$ ,  $\triangle A_2 B_3 A_3$ ,  $\triangle B_1 B_2 B_2$ ,  $\triangle B_2 B_3 B_1$ ,  $\triangle B_3 B_4 A_3$ ,  $\triangle B_3 B_4 A_3$ ,  $\triangle B_2 B_4 A_3$ ,  $\triangle A_4 B_2 A_3$ , dan  $\triangle A_1 B_2 A_4$ . Maka  $k(4, 4) = 10$ .

(b). Misalkan menara pengawas dari kebun tersebut adalah  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$  dan  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$  sebagai menara pemantau. Pilih  $B_n$  sehingga tidak ada  $B_k$  yang berada di dalam  $\triangle A_i B_n A_{i+1}$  dengan bilangan asli  $1 \leq k < n$ .



Banyak daerah pada konfigurasi ini adalah  $k(m, n)$ . Buat titik  $B_{n+1}$  yang terletak di dalam  $\triangle A_i B_n A_{i+1}$ . Dengan menghubungkan titik  $A_i, A_{i+1}$ , dan  $B_{n+1}$ , maka akan terbentuk tiga daerah pada  $\triangle A_i B_n A_{i+1}$ . Karena terdapat satu daerah yang telah terhitung, sehingga akan terbentuk dua daerah baru.

Sehingga kita dapat simpulkan bahwa

$$k(m, n + 1) = k(m, n) + 2 \iff k(m, n + 1) - k(m, n) = 2$$

Sehingga

$$k(m, 2) - k(m, 1) = 2$$

$$k(m, 3) - k(m, 2) = 2$$

⋮

$$k(m, n) - k(m, n - 1) = 2$$

Dengan menjumlahkan semuanya, maka

$$k(m, n) - k(m, 1) = 2(n - 1) \iff k(m, n) = 2n - 2 + k(m, 1)$$

Mudah ditinjau bahwa  $k(m, 1) = m$ . Sehingga  $k(m, n) = m + 2n - 2$ .

**Soal dan Pembahasan  
Kompetisi Sains Nasional  
Hari Kedua  
SMP/MTs Sederajat**

WILDAN BAGUS WICAKSONO

Updated 5 Nopember 2020

# PEMBERITAHUAN

Soal KSN SMP Hari Kedua pada file ini **belum tentu sama** dengan soal aslinya. Karena file yang didapatkan berupa tulisan kasaran atau tulisan tangan sehingga tidak dapat dijamin sama persis dengan soal aslinya. File ini dapat disebar atau dicetak tanpa mengubah atau menghilangkan identitas penulis. Ucapan terima kasih kepada Rizky Maulana Hakim, Miftahus Saidin, dan Muhammad Afifurrahman karena telah memberikan koreksi kepada saya. Ucapan terima kasih juga kepada Marley D'lailano Putra yang telah memberikan alternatif penyelesaian pada soal tertentu. Koreksi, kritik, maupun saran akan sangat berharga bagi saya dan dapat disampaikan melalui [instagram](#) atau [facebook](#) saya.

**I**

Soal

**Soal 1.** Diberikan barisan  $a_1, a_2, a_3, \dots$  dan  $a_1 = 1$ . Untuk setiap bilangan asli  $2 \leq n \leq 2020$ , berlaku

$$a_n = 1 + a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1}$$

Buktikan bahwa

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{2019}} < 2$$

**Soal 2.** Dalam ekspresi

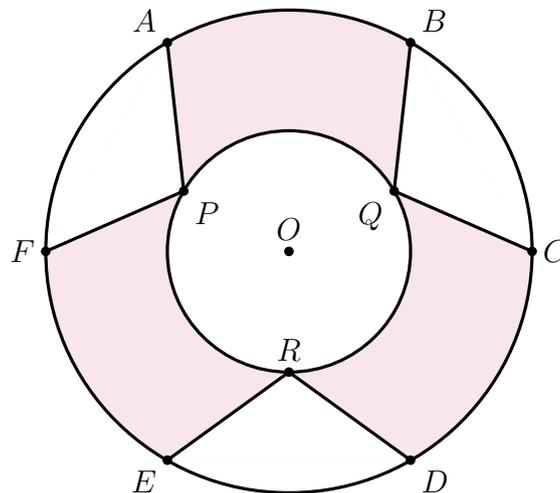
$$a = \left\lceil \sqrt{2020 + \sqrt{2020 + \sqrt{2020 + \cdots}}} \right\rceil$$

dan

$$b = \left\lfloor \sqrt{1442 + \sqrt{1442 + \sqrt{1442 + \cdots}}} \right\rfloor$$

bilangan 2020 muncul sebanyak 1442 kali dan bilangan 1442 muncul sebanyak 2020 kali, serta  $\lceil x \rceil$  dan  $\lfloor y \rfloor$  berturut-turut menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar daripada  $x$  dan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil daripada  $y$ . Tentukan nilai dari  $c = a - b$ .

**Soal 3.** Diberikan dua buah lingkaran yang berpusat di titik yang sama, yaitu titik  $O$  yang memiliki jari-jari 10 cm dan 5 cm. Titik  $A, B, C, D, E, F$  masing-masing terletak pada keliling lingkaran besar sehingga membagi busur lingkaran besar menjadi enam bagian sama panjang. Titik  $P, Q$ , dan  $R$  masing-masing terletak pada keliling lingkaran kecil sehingga panjang  $PA = PF, QB = QC$ , dan  $RE = RD$ . Tentukan luas daerah yang diarsir.



**Soal 4.** Fahmi akan membeli sepasang ikan koi yang berada di dalam akuarium. Saat ia mengambil secara acak, peluang dia mendapatkan ikan dengan jenis kelamin yang sama adalah  $\frac{1}{2}$ . Buktikan bahwa banyak ikan koi di dalam akuarium tersebut merupakan bilangan kuadrat sempurna.

**Soal 5.** Seorang apoteker ingin memasukkan cairan sebanyak 155 ml ke dalam tiga botol. Ada tiga pilihan botol, yaitu

(a). Botol A:

- Berkapasitas 5 ml,
- Harga satu botol adalah Rp10.000,00,
- Bila membeli botol selanjutnya, mendapat potongan harga 20%, hingga pembelian keempat atau bila membeli empat botol akan mendapatkan satu botol A secara gratis.

(b). Botol B:

- Berkapasitas 8 ml,
- Harga satu botol adalah Rp15.000,00,
- Bila membeli dua botol, maka botol kedua mendapat potongan harga 20%,
- Bila membeli tiga botol, maka akan mendapatkan satu botol lagi secara gratis.

(c). Botol C:

- Berkapasitas 14 ml,
- Harga satu botol adalah Rp25.000,00,
- Jika membeli dua botol, maka akan mendapatkan satu botol A secara gratis,
- Jika membeli tiga botol, maka akan mendapatkan satu botol B secara gratis.

Jika dalam satu kali pembelian, hanya boleh membeli maksimal sebanyak empat botol, maka carilah kemungkinan apoteker memasukkan ke dalam botol-botol agar biaya minimum (botol tidak harus diisi sesuai kapasitas).

# II

## Soal dan Pembahasan

**Soal 1.** Diberikan barisan  $a_1, a_2, a_3, \dots$  dan  $a_1 = 1$ . Untuk setiap bilangan asli  $2 \leq n \leq 2020$ , berlaku

$$a_n = 1 + a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1}$$

Buktikan bahwa

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{2019}} < 2$$

SOLUSI 1. Kita perumum, dengan membuktikan bahwa

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq 2 - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$$

untuk setiap bilangan asli  $n$ . Akan kita buktikan dengan induksi. Mudah didapatkan bahwa  $a_2 = 2$ . Untuk  $n = 1$ , maka

$$\frac{1}{a_1} = 1 \leq 2 - \frac{1}{a_2 - 1} = 2 - \frac{1}{2 - 1} = 2 - 1 = 1$$

yang berarti benar. Asumsikan untuk setiap  $n = 1, 2, 3, \dots, k$  juga berlaku benar. Untuk  $n = k + 1$ , maka

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{k+1}} \leq 2 - \frac{1}{a_{k+1} - 1} + \frac{1}{a_{k+1}} = 2 - \frac{1}{a_{k+1}(a_{k+1} - 1)}$$

Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} - 1 &= a_1 a_2 a_3 \cdots a_k \\ a_{k+1}(a_{k+1} - 1) &= a_1 a_2 a_3 \cdots a_k a_{k+1} \\ a_{k+1}(a_{k+1} - 1) &= a_{k+2} - 1 \end{aligned}$$

Kita dapatkan bahwa

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{k+1}} \leq 2 - \frac{1}{a_{k+1}(a_{k+1} - 1)} = 2 - \frac{1}{a_{k+2} - 1}$$

yang menyimpulkan

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{k+1}} \leq 2 - \frac{1}{a_{k+2} - 1}$$

sehingga juga benar untuk  $n = k + 1$ . Maka menurut induksi terbukti.

Maka

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq 2 - \frac{1}{a_{n+1} - 1} < 2$$

Dengan mengambil  $n = 2019$ , maka

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{2019}} < 2$$

SOLUSI 2. (Oleh Marley D'lailano Putra). Misalkan Arin( $n$ ) menyatakan

$$\text{Arin}(n) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

Ingin dibuktikan bahwa jika  $\text{Arin}(n) < 2$ . Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \text{Arin}(n) &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} \\ &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{1 + a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} \\ &< \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} \end{aligned}$$

Misalkan

$$X(n) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

**Klaim** —  $X(n) = X(n+1)$  untuk setiap bilangan asli  $n$ .

*Bukti.* Ingin dibuktikan bahwa  $X(n) = X(n+1)$ . Misalkan  $F = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ . Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{1}{F} &= \frac{1}{F(F+1)} + \frac{1}{F+1} \\ \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} &= \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \end{aligned}$$

Dengan menjumlahkan kedua ruas dengan  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ , maka

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}}$$

Diperoleh  $X(n) = X(n+1)$ . □

Dengan itu diperoleh

$$X(1) = X(2) = X(3) = \cdots = X(n-1) = X(n)$$

Karena  $X(1) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} = 2$ , diperoleh  $\text{Arin}(n) < 2$ . Substitusi  $n = 2019$ , didapat

$$\text{Arin}(2019) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{2019}} < 2$$

**Soal 2.** Dalam ekspresi

$$a = \left\lceil \sqrt{2020 + \sqrt{2020 + \sqrt{2020 + \dots}}} \right\rceil$$

dan

$$b = \left\lfloor \sqrt{1442 + \sqrt{1442 + \sqrt{1442 + \dots}}} \right\rfloor$$

bilangan 2020 muncul sebanyak 1442 kali dan bilangan 1442 muncul sebanyak 2020 kali, serta  $\lceil x \rceil$  dan  $\lfloor y \rfloor$  berturut-turut menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar daripada  $x$  dan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil daripada  $y$ . Tentukan nilai dari  $c = a - b$ .

SOLUSI. Jawabannya adalah  $\boxed{8}$ .

Tinjau bahwa

$$\sqrt{2020 + \sqrt{2020}} < \sqrt{\underbrace{2020 + \sqrt{2020 + \dots + \sqrt{2020}}}_{2020 \text{ muncul sebanyak } 1442 \text{ kali}}} < \sqrt{2020 + \sqrt{2020 + \sqrt{2020 + \dots}}}$$

Perhatikan bahwa

$$\sqrt{2020 + \sqrt{2020}} \approx \sqrt{2020 + 44,9} \approx \sqrt{2064,9} \approx 45,441$$

Misalkan

$$k = \sqrt{2020 + \sqrt{2020 + \sqrt{2020 + \dots}}}$$

Maka

$$k = \sqrt{2020 + \sqrt{2020 + \sqrt{2020 + \dots}}} = \sqrt{2020 + k}$$

yang berarti  $k = \sqrt{k + 2020}$  dimana  $k \geq 0$ . Dengan mengkuadratkan kedua ruas, kita dapatkan  $k^2 - k - 2020 = 0$ . Maka

$$k_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2020)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{8081}}{2}$$

Karena  $k \geq 0$ , maka

$$k = \frac{1 + \sqrt{8081}}{2} \approx \frac{1 + 89,89}{2} \approx 45,445$$

Demikian  $45,441 < a < 45,445$  yang berarti  $\lceil a \rceil = 46$ .

Dengan cara yang sama, tinjau

$$\sqrt{1442 + \sqrt{1442}} < \sqrt{\underbrace{1442 + \sqrt{1442 + \dots + \sqrt{1442}}}_{1442 \text{ muncul sebanyak } 2020 \text{ kali}}} < \sqrt{1442 + \sqrt{1442 + \sqrt{1442 + \dots}}}$$

Perhatikan bahwa

$$\sqrt{1442 + \sqrt{1442}} \approx \sqrt{1442 + 37,97} \approx 38,470$$

Misalkan

$$m = \sqrt{1442 + \sqrt{1442 + \sqrt{1442 + \dots}}}$$

Maka

$$m = \sqrt{1442 + \sqrt{1442 + \sqrt{1442 + \dots}}} = \sqrt{1442 + m}$$

yang berarti  $m = \sqrt{1442 + m}$ . Dengan mengkuadratkan kedua ruas, kita dapatkan  $m^2 - m - 1442 = 0$ . Maka

$$m_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1442)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5769}}{2}$$

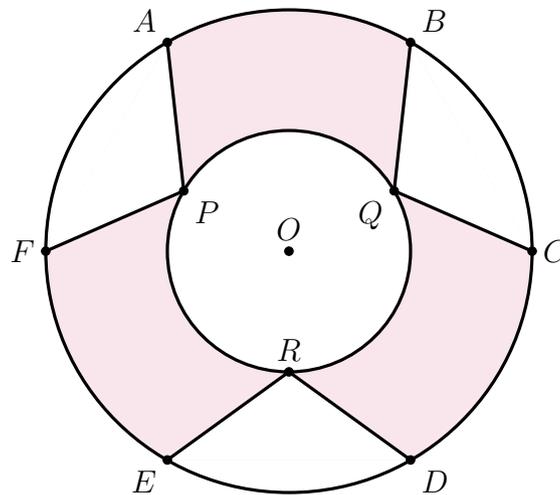
Karena  $m \geq 0$ , maka

$$m = \frac{1 + \sqrt{5769}}{2} \approx \frac{1 + 75,95}{2} = 38,476$$

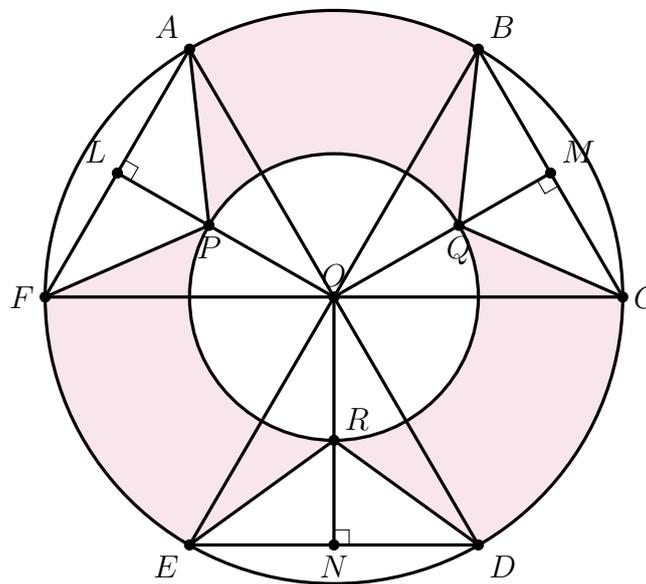
Demikian  $38,470 < b < 38,476$  yang berarti  $[b] = 38$ .

Sehingga  $c = a - b = 46 - 38 = 8$ .

**Soal 3.** Diberikan dua buah lingkaran yang berpusat di titik yang sama, yaitu titik  $O$  dan memiliki jari-jari 10 cm dan 5 cm. Titik  $A, B, C, D, E, F$  masing-masing terletak pada keliling lingkaran besar sehingga membagi busur lingkaran besar menjadi enam bagian sama panjang. Titik  $P, Q,$  dan  $R$  masing-masing terletak pada keliling lingkaran kecil sehingga panjang  $PA = PF, QB = QC,$  dan  $RE = RD$ . Tentukan luas daerah yang diarsir.



SOLUSI. Jawabannya adalah  $25(3 + \pi) \text{ cm}^2$ .



Karena  $A, B, C, D, E,$  dan  $F$  membagi busur lingkaran besar menjadi enam bagian sama panjang, artinya lingkaran besar terbagi menjadi enam bagian yang kongruen. Sehingga kita punya

$$\angle FOA = \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF = 60^\circ$$

Karena  $\angle FOE + \angle EOD + \angle DOC = 180^\circ$ , artinya  $F, O, C$  segaris. Begitu juga dengan  $E, O, B$  segaris dan  $D, O, A$  segaris.

**Klaim** — Titik  $P, Q, R$  dilalui oleh garis tinggi  $\triangle FOA, \triangle OBC$ , dan  $\triangle OED$ .

*Bukti.* Karena panjang  $OF = OA$ , maka besar sudut  $\angle OFA = \angle FAO = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$  yang berarti  $\triangle FOA$  sama sisi. Begitu juga dengan  $\triangle OCB$  dan  $\triangle OED$ . Tarik garis tinggi dari titik  $R$  ke  $ED$  dan memotong  $ED$  di titik  $N'$ . Karena panjang  $RD = RE$ , maka panjang  $EN' = N'D$ . Tarik garis tinggi dari titik  $O$  ke  $ED$  dan memotong  $ED$  di titik  $N$ . Karena panjang  $OE = OD$ , maka panjang  $EN = ND$ . Hal ini menyimpulkan  $N' = N$  yang berarti  $O, R, N$  segaris. Dengan cara yang serupa, jika  $OL$  dan  $OM$  berturut-turut garis tinggi  $\triangle OFA$  dan  $\triangle OCB$ , maka  $O, P, L$  segaris dan  $O, Q, M$  segaris.  $\square$

Perhatikan sektor  $FOA$ . Luas dari sektor lingkaran besar adalah

$$L_{1/6 \text{ L. besar}} = \frac{1}{6}\pi \times 10^2 = \frac{100}{6}\pi \text{ cm}^2$$

Sedangkan, luas sektor dari lingkaran kecil adalah

$$L_{1/6 \text{ L. kecil}} = \frac{1}{6}\pi \times 5^2 = \frac{25}{6}\pi \text{ cm}^2$$

Luas tembereng dari sektor tersebut adalah luas sektor lingkaran besar dikurangi dengan segitiga sama sisi  $\triangle OFA$ .

$$L_{\text{tembereng}} = \frac{1}{6}\pi \times 10^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2 \sqrt{3} = \left(\frac{100}{6}\pi - 25\sqrt{3}\right) \text{ cm}^2$$

Perhatikan bahwa  $\angle FOL = 30^\circ, \angle OFL = 60^\circ$ , dan  $\angle FLO = 90^\circ$ . Akibatnya, perbandingan panjang  $FL : OL : FO = 1 : \sqrt{3} : 2$ . Maka panjang  $OL = \frac{\sqrt{3}}{2} \times FO = 5\sqrt{3}$  cm. Tinjau  $OP$  merupakan jari-jari lingkaran kecil, maka panjang  $OP = 5$  cm. Demikian panjang  $PL = OL - OP = (5\sqrt{3} - 5)$  cm. Demikian luas segitiga  $APF$  adalah

$$L_{\triangle APF} = \frac{1}{2} \times AF \times LP = \frac{1}{2} \times 10 \times (5\sqrt{3} - 5) = (25\sqrt{3} - 25) \text{ cm}^2$$

Maka luas daerah yang diarsir pada sektor  $FOA$  adalah

$$\begin{aligned} L_{\text{arsir sektor } FOA} &= L_{1/6 \text{ L. besar}} - L_{1/6 \text{ L. kecil}} - L_{\text{tembereng}} - L_{\triangle APF} \\ &= \frac{100}{6}\pi - \frac{25}{6}\pi - \left(\frac{100}{6}\pi - 25\sqrt{3}\right) - (25\sqrt{3} - 25) \\ &= \frac{100}{6}\pi - \frac{25}{6}\pi - \frac{100}{6}\pi + 25\sqrt{3} - 25\sqrt{3} + 25 \\ &= \frac{150 - 25\pi}{6} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Karena terdapat dua sektor lain yang sama dengan luas arsir sektor  $OFA$ , yaitu sektor  $OBC$  dan sektor  $ODE$ , maka jumlah luas daerah yang diarsir pada tiga sektor ini adalah

$$L_{\text{arsir sektor } FOA} + L_{\text{arsir sektor } COB} + L_{\text{arsir sektor } DOE} = 3 \times \frac{150 - 25\pi}{6} = \frac{150 - 25\pi}{2} \text{ cm}^2$$

Sekarang perhatikan sektor  $OBA$ . Luas arsir dari sektor tersebut adalah

$$L_{\text{arsir sektor } OBA} = L_{1/6 \text{ L. besar}} - L_{1/6 \text{ L. kecil}} = \frac{100}{6}\pi - \frac{25}{6}\pi = \frac{75}{6}\pi \text{ cm}^2$$

Karena terdapat dua sektor lain yang sama dengan luas arsir sektor  $OBA$ , yaitu sektor  $OCD$  dan sektor  $OEF$ , maka jumlah luas daerah yang diarsir pada tiga sektor ini adalah

$$L_{\text{arsir sektor } OBA} + L_{\text{arsir sektor } OCD} + L_{\text{arsir sektor } OEF} = 3 \times \frac{75}{6}\pi = \frac{75}{2}\pi \text{ cm}^2$$

Sehingga luas daerah yang diarsir seluruhnya adalah

$$L_{\text{arsir}} = \frac{150 - 25\pi}{2} + \frac{75}{2}\pi = \frac{150 + 50\pi}{2} = \frac{50(3 + \pi)}{2} = 25(3 + \pi) \text{ cm}^2$$

Jadi, luas daerah yang diarsir adalah  $25(3 + \pi) \text{ cm}^2$ .

**Soal 4.** Fahmi akan membeli sepasang ikan koi yang berada di dalam akuarium. Saat ia mengambil secara acak, peluang dia mendapatkan ikan dengan jenis kelamin yang sama adalah  $\frac{1}{2}$ . Buktikan bahwa banyak ikan koi di dalam akuarium tersebut merupakan bilangan kuadrat sempurna.

.....

**SOLUSI.** Misalkan banyaknya ikan koi dengan jenis kelamin jantan dan betina berturut-turut adalah  $j$  dan  $b$  dimana  $n = b + j$ . Diketahui bahwa peluang dia mendapatkan ikan koi dengan jenis kelamin sama adalah  $\frac{1}{2}$ . Banyak cara memilih dua ikan berjenis kelamin jantan adalah  $C(j, 2)$ , sedangkan dua ikan berjenis kelamin betina adalah  $C(b, 2)$ . Maka peluangnya adalah

$$\begin{aligned}\frac{C(j, 2) + C(b, 2)}{C(b + j, 2)} &= \frac{1}{2} \\ \frac{\frac{j(j-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2}}{\frac{(b+j)(b+j-1)}{2}} &= \frac{1}{2} \\ \frac{j^2 - j + b^2 - b}{b^2 + j^2 + 2bj - b - j} &= \frac{1}{2} \\ 2j^2 - 2j + 2b^2 - 2b &= b^2 + j^2 + 2bj - b - j \\ j^2 + b^2 - 2bj &= b + j \\ (b - j)^2 &= n\end{aligned}$$

yang menyimpulkan  $n$  kuadrat sempurna. ■

**Soal 5.** Seorang apoteker ingin memasukkan cairan sebanyak 155 ml ke dalam tiga botol. Ada tiga pilihan botol, yaitu

(a). Botol A:

- Berkapasitas 5 ml,
- Harga satu botol adalah Rp10.000,00,
- Bila membeli botol selanjutnya, mendapat potongan harga 20%, hingga pembelian keempat atau bila membeli empat botol akan mendapatkan satu botol A secara gratis.

(b). Botol B:

- Berkapasitas 8 ml,
- Harga satu botol adalah Rp15.000,00,
- Bila membeli dua botol, maka botol kedua mendapat potongan harga 20%,
- Bila membeli tiga botol, maka akan mendapatkan satu botol lagi secara gratis.

(c). Botol C:

- Berkapasitas 14 ml,
- Harga satu botol adalah Rp25.000,00,
- Jika membeli dua botol, maka akan mendapatkan satu botol A secara gratis,
- Jika membeli tiga botol, maka akan mendapatkan satu botol B secara gratis.

Jika dalam satu kali pembelian, hanya boleh membeli maksimal sebanyak empat botol, maka carilah kemungkinan apoteker memasukkan ke dalam botol-botol agar biaya minimum (botol tidak harus diisi sesuai kapasitas).

.....  
SOLUSI. Jawabannya adalah Rp225.000,00.

Kita tinjau satu per satu untuk menentukan harga per mililiter.

1. Jika membeli satu botol A, maka harganya adalah Rp10.000,00 yang berkapasitas sebanyak 5 ml. Sehingga harga botol A adalah Rp2.000,00/ml.
2. Jika membeli dua botol A, maka botol kedua mendapatkan potongan harga 20%. Sehingga harga dari botol kedua adalah  $100\% - 20\% = 80\%$  dari harga botol A aslinya. Maka total

pembelian dua botol ini adalah

$$10.000 + \frac{80}{100} \times 10.000 = 10.000 + 8.000 = 18.000$$

yang berkapasitas 10 ml. Sehingga harga botol A adalah Rp1.800,00/ml.

3. Jika membeli tiga botol A, maka pembelian botol pertama adalah Rp10.000,00, pembelian botol kedua dan ketiga adalah

$$\frac{80}{100} \times 10.000 = 8.000$$

Sehingga total harganya adalah Rp26.000,00 berkapasitas 15 ml. Maka harga botol A adalah Rp1733,33/ml.

4. Jika membeli empat botol A, maka ada dua kemungkinan:

- Mendapatkan diskon hingga pembelian keempat. Harga botol A pada pembelian pertama adalah Rp10.000,00. Maka harga botol A pada pembelian kedua, ketiga, dan keempat adalah

$$\frac{80}{100} \times 10.000 = 8.000$$

Total harga keempat botol ini adalah Rp34.000,00 berkapasitas 20 ml. Maka harga botol A adalah Rp1.700,00/ml.

- Pada pembelian keempat mendapatkan satu botol A secara gratis. Maka harga keempat botol tersebut totalnya adalah Rp40.000,00 lalu mendapatkan satu botol A secara gratis, yang artinya berkapasitas 25 ml. Maka harga botol A adalah Rp1600,00/ml.

5. Jika membeli sebuah botol B dengan harga Rp15.000,00 berkapasitas 8 ml, maka harganya Rp1.875/ml.

6. Jika membeli dua botol B, maka botol kedua mendapat potongan harga 20%. Sehingga total harga untuk pembelian dua botol ini adalah

$$15.000 + \frac{80}{100} \times 15.000 = 24.000$$

berkapasitas 16 ml. Maka harga botol B adalah Rp1500/ml.

7. Jika membeli tiga botol B, maka akan mendapatkan satu botol B secara gratis. Artinya, total harganya adalah Rp45.000,00 berkapasitas 32 ml. Maka harga botol B adalah Rp1.406,25/ml.

8. Jika membeli satu botol C dengan harga Rp25.000,00 berkapasitas 14 ml, maka harga botol C adalah Rp1.785,71/ml.
9. Jika membeli dua botol C, maka akan mendapatkan satu botol A secara gratis. Maka total pembeliannya adalah Rp50.000,00 berkapasitas 33 ml yang berarti Rp1.515,15/ml.
10. Jika membeli tiga botol C, maka akan mendapatkan satu botol B secara gratis. Maka total pembeliannya adalah Rp75.000,00 berkapasitas 50 ml yang berarti Rp1500,00/ml.

Dari hal-hal diatas, harga termurah pada nomor 7, yaitu Rp1406,25/ml dengan membeli tiga botol B (dan mendapatkan satu botol B secara gratis). Kita memerlukan beberapa botol sehingga dapat menampung 155 ml. Maka pembayaran minimum dapat tercapai jika kita melakukan pembelian pada nomor 7 sebanyak 5 kali (sehingga diperoleh kapasitas 160 ml). Karena jika terdapat satu botol saja yang harganya lebih dari Rp1.406,25/ml, maka harganya dapat dipastikan lebih dari Rp225.000,00.

Jadi, pembayaran minimumnya adalah Rp225.000,00.